

Tema 1:

Introducción a la teoría de la probabilidad

Formaciones CEE

02/06/2025

Experimento aleatorio

Un **experimento aleatorio** es aquel que verifica las siguientes condiciones:

- Conjunto de resultados posibles: Todos sus posibles resultados son conocidos de antemano
- Repetibilidad bajo condiciones controladas
- Incertidumbre en los resultados: Bajo las mismas condiciones puede dar lugar a distintos resultados y no se puede prever su resultado antes de la realización
- Asignación de probabilidades

Ejemplos:

- Lanzamiento de una moneda
- Lanzamiento de un dado
- Selección de una carta de la baraja
- Selección de una muestra

Se llama **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio al conjunto formado por todos los posibles resultados del experimento aleatorio. Se representa por Ω . Se llama punto muestral a cada elemento del espacio muestral, $\omega_1, \omega_2, \dots$. Es decir:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$$

Tipos:

- Finito: es aquel que tiene un número finito de elementos.
- Infinito numerable: es aquel que tiene un número infinito numerable de elementos.
- Continuo: es aquel que contiene un número infinito no numerable de elementos.

Se denomina **suceso** a todo subconjunto A del espacio muestral, ($A \subseteq \Omega$). Cualquier hecho observable que pueda ocurrir en una realización particular del experimento.

Tipos:

- Suceso imposible es aquel que no ocurre nunca. Se representa por \emptyset .
- Suceso seguro es aquel que ocurre siempre. Se representa por Ω .
- Suceso elemental es el formado por un sólo punto muestral.
- Suceso compuesto es el formado por más de un punto muestral.

Se llama espacio de sucesos, \mathcal{S} , al conjunto formado por todos los sucesos asociados al experimento aleatorio en cuestión.

Dados los sucesos A y B de un espacio muestral Ω , definimos :

- Complementario de A : $A^c = \{\omega \in \Omega / \omega \notin A\}$
- Unión de A y B : $A \cup B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \text{ o } \omega \in B\}$
- Intersección de A y B : $A \cap B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \text{ y } \omega \in B\}$
- Diferencia de A y B : $A - B = A \cap B^c$
- A y B son sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$.

Propiedades:

- Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$
- Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Involución: $(A^c)^c = A$
- Operaciones con \emptyset : $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Idempotencia: $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$
- Complementariedad: $A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \emptyset$
- Operaciones con Ω : $A \cup \Omega = \Omega$ y $A \cap \Omega = A$
- Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Dado el espacio de sucesos \mathcal{S} asociado a un espacio muestral Ω , se define una medida de probabilidad, P , como una función $P : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ que verifique los siguientes axiomas:

- $P(A) \geq 0$, para cada $A \in \mathcal{S}$
- $P(\Omega) = 1$
- $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, con $A_n \in \mathcal{S}$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$

Propiedades:

- $P(\emptyset) = 0$.
- $P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Probabilidad condicionada:

La probabilidad de un suceso A cuando se sabe que otro suceso B ha ocurrido.

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema del producto:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Independencia de sucesos

Los sucesos A y B son **independientes** si se verifica que $P(A | B) = P(A)$

Propiedades:

- A y B son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Si A y B son independientes, lo son A y B^c , A^c y B y A^c y B^c .
- Incompatible e independiente son completamente diferentes.

A_1, A_2, \dots, A_n son **mutuamente independientes** si para $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ se verifica que $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ son independientes: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$

En el caso de que $n=3$, diremos que A , B y C son mutuamente independientes si:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Teorema de la Probabilidad total y Teorema de Bayes

Teorema de la Probabilidad Total:

Si A_i es un conjunto de sucesos exhaustivos ($\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$) y disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$), para todo B

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)$$

Teorema de Bayes:

Si A_i es un conjunto de sucesos exhaustivos ($\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$) y disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$), para todo B

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i) \cdot P(A_i)}$$