CUERPO DE DIPLOMADOS EN ESTADÍSTICA DEL ESTADO

JUNIO 2025

CEE FORMACIONES

Formaciones CEE

Copyright © 2025 GAELIMUS SL

Publicado por GAELIMUS SL

formacionescee.com

Todos los derechos reservados.

Este documento está protegido por derechos de autor. No está permitido copiar, distribuir, modificar, traducir ni reproducir ninguna parte de esta obra, en ningún formato ni por ningún medio, sin el consentimiento previo y por escrito del titular de los derechos.

Queda estrictamente prohibido su uso con fines comerciales, educativos o de formación fuera del ámbito personal del comprador original. El incumplimiento de estas condiciones podrá derivar en acciones legales conforme a la legislación vigente en materia de propiedad intelectual.

Primera impresión, Mayo 2025
oposiciones@formacionescee.com

FORMACIONES

Índice de contenido

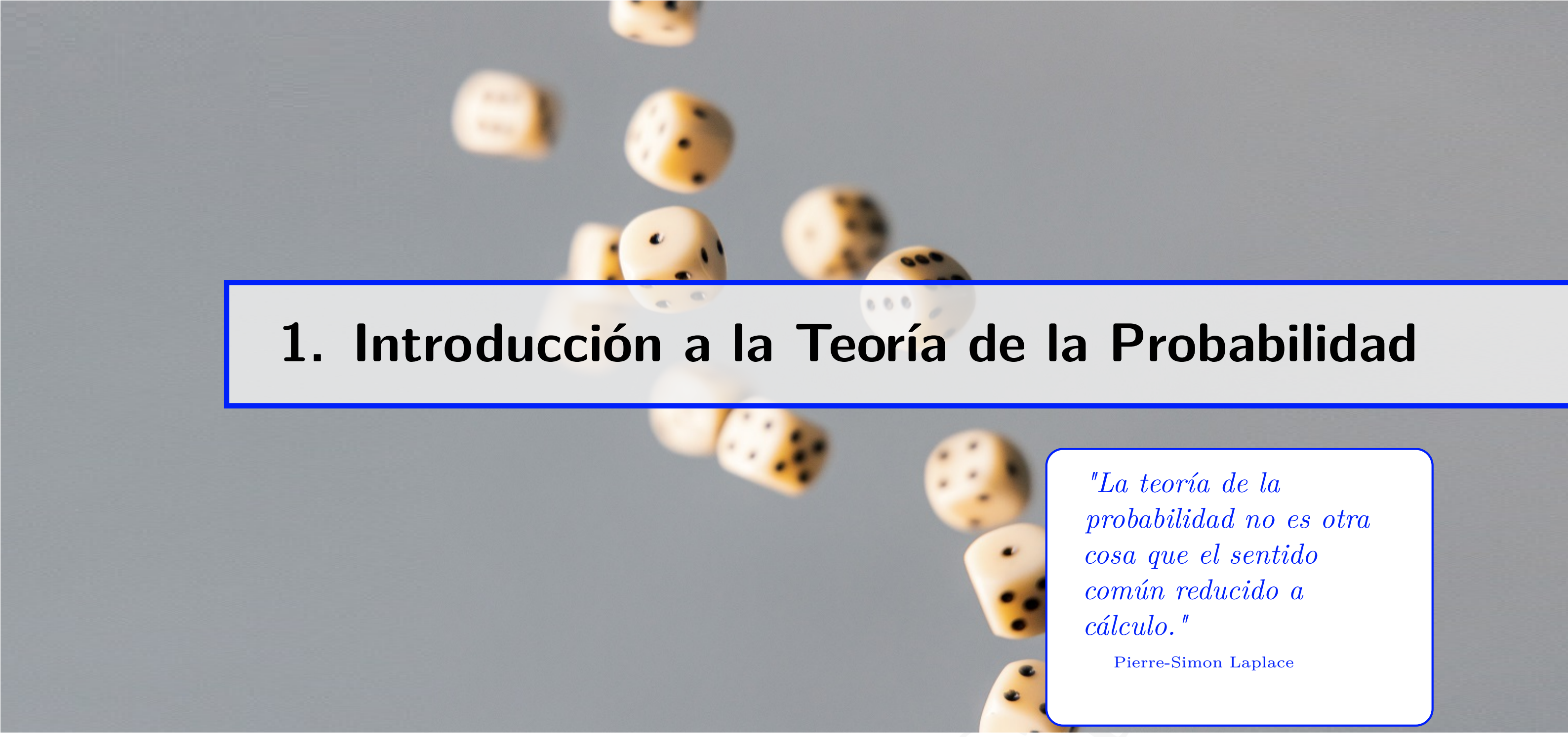
Formaciones CEE

Formaciones CEE

I

Estadística - Probabilidad e Inferencia

Formaciones CEE



1. Introducción a la Teoría de la Probabilidad

"La teoría de la probabilidad no es otra cosa que el sentido común reducido a cálculo."

Pierre-Simon Laplace

1.1 Introducción

1.1.1 Historia de la probabilidad

El azar y la incertidumbre han condicionado desde siempre la vida y el comportamiento de los seres humanos. Las variaciones en el clima y su impacto en el abastecimiento de los alimentos han obligado desde el principio al hombre a esforzarse por reducir la incertidumbre y sus efectos. Los juegos de azar tienen también una larga historia; recordemos, por ejemplo, que inmediatamente después de crucificar a Cristo, los soldados se jugaron su túnica a los dados.

Se admite que la correspondencia, a mediados del siglo XVII, entre Antoine Gombaud, caballero de Méré (1607-1684) y Blaise Pascal (1623-1662), sobre el reparto del dinero apostado al principio de una partida que es repentinamente interrumpida, marca el origen del estudio de lo que hoy conocemos como teoría de la probabilidad. A su vez, Pascal introdujo a otro matemático, Pierre Fermat (1601-1665), en el reto de resolver el problema que verosímilmente estaba relacionado con la ilegalidad de las partidas en aquella época. No obstante, algunas probabilidades numéricas para ciertas combinaciones de resultados de dados ya habían sido calculadas por Girolamo Cardano (1501-1576) y por Galileo Galilei (1564-1642). La teoría de probabilidad ha sido constantemente desarrollada desde el siglo XVII y ampliamente aplicada en diversos campos de estudio. Hoy, la teoría de la probabilidad es una herramienta importante en la mayoría de las áreas de ingeniería, ciencias y administración.

1.1.2 Interpretaciones de la probabilidad

Además de muchas aplicaciones formales de la teoría, el concepto de probabilidad aparece en nuestra vida y en nuestras conversaciones cotidianas. Pero a pesar de que dicho concepto es una parte tan común y natural de nuestra experiencia, no existe una única interpretación científica del término probabilidad aceptada por todos los estadísticos, filósofos y demás autoridades científicas. A través de los años, cada interpretación propuesta por unos expertos ha sido criticada por otros. De hecho, el verdadero significado de la probabilidad es todavía un tema muy conflictivo y surge en muchas discusiones filosóficas actuales sobre los fundamentos de la estadística. Describiremos aquí tres interpretaciones diferentes de la probabilidad antes de introducir más adelante, la definición axiomática, la más comúnmente aceptada.

1.1.2.1 La interpretación frecuentista de la probabilidad

En muchos problemas, la probabilidad de obtener algún resultado específico de un proceso puede ser interpretada en el sentido de la frecuencia relativa con la que se obtendría ese resultado, si el proceso se repitiera un número grande de veces en condiciones similares. Por ejemplo, la probabilidad de obtener una cara cuando se lanza una moneda equilibrada es considerada 1/2, debido a que la frecuencia relativa de caras debería ser aproximadamente 1/2, cuando la moneda es lanzada un número grande de veces en condiciones similares. En otras palabras, se supone que la proporción de lanzamientos en los que se obtiene una cara sería aproximadamente 1/2.

Está claro que las condiciones mencionadas en este ejemplo son muy vagas para servir como base de una definición científica de probabilidad. En primer lugar, se menciona un "número grande" de lanzamientos de la moneda, pero no hay una indicación clara del número específico que podría considerarse suficientemente grande. En segundo lugar, se afirma que los lanzamientos deberían tener lugar "en condiciones similares", pero estas condiciones no se describen con precisión. Las condiciones en las cuales se lanza la moneda no pueden ser completamente idénticas para todos los lanzamientos porque entonces los resultados serían todos iguales y se obtendrían sólo caras o sólo cruces. Consecuentemente, los lanzamientos no deben ser completamente controlados sino que deben tener algunas características "aleatorias".

Se afirma, además, que la frecuencia relativa de caras sería "aproximadamente 1/2", pero no se especifica un límite para la variación posible respecto del valor 1/2. Si una moneda fuera lanzada 1.000.000 de veces, no esperaríamos obtener exactamente 500.000 caras. En realidad, nos sorprenderíamos mucho si obtuviéramos exactamente 500.000. Por otro lado, tampoco esperaríamos que el número de caras distara mucho de 500.000. Sería deseable poder hacer una afirmación precisa de las verosimilitudes de los diferentes números posibles de caras, pero estas verosimilitudes dependerían necesariamente del mismo concepto de probabilidad que estamos intentando definir.

Otro inconveniente de la interpretación frecuentista de la probabilidad es que sólo puede utilizarse para un problema en el que pueda haber, al menos en principio, un número grande de repeticiones similares de cierto proceso. Muchos problemas importantes no son de este tipo. Por ejemplo, la interpretación frecuentista de la probabilidad de que una determinada central nuclear falle.

1.1.2.2 La interpretación clásica de la probabilidad

La interpretación clásica de la probabilidad, Laplace (1749-1827), está basada en el concepto de resultados igualmente verosímiles. Por ejemplo, cuando se lanza una moneda existen dos resultados posibles: cara o cruz. Si se puede suponer que la ocurrencia de estos resultados es igualmente verosímil, entonces deben tener la misma probabilidad. Puesto que la suma de las probabilidades debe ser 1, tanto la probabilidad de una cara como la probabilidad de una cruz debe ser 1/2. Generalizando, si el resultado de algún proceso debe ser uno de n resultados diferentes, y si estos n resultados son igualmente verosímiles, entonces la probabilidad de cada resultado es $1/n$.

Dos dificultades básicas aparecen cuando se intenta desarrollar una definición formal de probabilidad desde la interpretación clásica. En primer lugar, el concepto de resultados igualmente verosímiles se basa en esencia en el concepto de probabilidad que estamos tratando de definir. Afirmar que dos resultados posibles son igualmente verosímiles es lo mismo que afirmar que los resultados tienen la misma probabilidad. En segundo lugar, no se proporciona un método sistemático para asignar probabilidades a resultados que no sean igualmente verosímiles. Cuando se lanza una moneda o se arroja un dado equilibrado o se escoge una carta de una baraja bien mezclada, los diferentes resultados posibles pueden, en general, ser considerados igualmente verosímiles debida a la naturaleza del proceso. Sin embargo, cuando el problema es predecir si una persona se casará o si un proyecto de investigación tendrá éxito, los resultados posibles no suelen considerarse igualmente verosímiles, y es necesario un método diferente para asignar probabilidades a estos resultados.

1.1.2.3 La interpretación subjetiva de la probabilidad

De acuerdo con ella la probabilidad que una persona asigna a cada uno de los posibles resultados de un experimento viene dada por su propio juicio sobre la verosimilitud de cada resultado. Si los juicios de la persona acerca de estas verosimilitudes relativas a diversas combinaciones de resultados satisfacen ciertas condiciones de consistencia, puede demostrarse que las probabilidades subjetivas de los diferentes sucesos quedan determinadas de forma única. Las dificultades asociadas con esta perspectiva son dos: parece humanamente difícil asumir que los juicios de una persona sobre un número infinito de sucesos estén libres de contradicciones internas; por otro lado, no se dan claves para que dos o más personas que trabajan juntas tengan juicios consistentes entre ellas.

1.2 Experimento aleatorio

Un **experimento aleatorio** es un proceso o procedimiento que se realiza bajo condiciones bien definidas y que puede repetirse un número arbitrario de veces, en el cual el resultado no puede preverse con certeza antes de su realización. A pesar de seguir un conjunto de reglas específicas, un experimento aleatorio puede producir distintos resultados cada vez que se lleva a cabo, debido a la influencia del azar.

En términos más formales, un experimento aleatorio se caracteriza por las siguientes propiedades:

1. **Incertidumbre en los Resultados**: Aunque se conocen todos los posibles resultados que se pueden obtener, el resultado específico de un experimento aleatorio no puede predecirse con seguridad antes de su ejecución.

2. **Repetibilidad bajo Condiciones Controladas**: El experimento puede realizarse múltiples veces bajo las mismas condiciones iniciales, y cada repetición puede generar un resultado diferente.

3. **Conjunto de Resultados Posibles**: Los resultados de un experimento aleatorio forman un conjunto llamado **espacio muestral**, que contiene todos los resultados posibles del experimento.

4. **Asignación de Probabilidades**: A cada resultado del experimento se le puede asignar una probabilidad, la cual refleja la “propensión” del experimento a producir ese resultado bajo condiciones específicas.

Ejemplos de Experimentos Aleatorios:

- Lanzamiento de una moneda: Al lanzar una moneda, el resultado puede ser “cara” o “cruz”, pero no se puede predecir con certeza qué ocurrirá en un lanzamiento particular.

- Lanzamiento de un dado: Al lanzar un dado justo, se pueden obtener los números del 1 al 6, con igual probabilidad para cada resultado.

- Selección de una carta de una baraja: Al extraer una carta de una baraja estándar, cada una de las 52 cartas tiene la misma probabilidad de ser seleccionada.

A cada repetición particular de un experimento aleatorio la llamaremos una **realización** de éste.

En algunos casos, el experimento o fenómeno que se analiza puede no ser repetible bajo las mismas condiciones exactas, y aun así es objeto de estudio de la teoría de la probabilidad. Esto ocurre porque la teoría de la probabilidad no se limita a experimentos que puedan repetirse indefinidamente en condiciones idénticas, sino que también abarca situaciones donde la repetición no es posible o no tiene sentido.

Ejemplos de Situaciones Donde se Relaja la Repetibilidad:

1. Eventos Históricos o Únicos: El estudio de sucesos históricos, como la probabilidad de que ocurra un colapso financiero, un desastre natural o un conflicto bélico, no se basa en la repetición del evento bajo condiciones idénticas. Estos eventos no se pueden repetir exactamente en las mismas condiciones, pero se pueden modelar probabilísticamente basándose en datos históricos, análisis de factores relevantes o modelos estocásticos.

2. Evolución de Procesos Biológicos: En biología, fenómenos como la evolución de una especie o la propagación de una enfermedad en una población no son repetibles bajo condiciones controladas idénticas, debido a la naturaleza compleja y no replicable del entorno biológico. Sin embargo, la teoría de la probabilidad se usa para modelar la propagación de enfermedades (por ejemplo, modelos SIR en epidemiología) o la variabilidad genética.

3. Modelos de Series Temporales: Los modelos de series temporales, como los financieros o climáticos, analizan datos que no se generan bajo condiciones repetibles en el sentido clásico. No se puede ”repetir” el movimiento del mercado de valores o la evolución de las temperaturas diarias en una ciudad, pero se puede estudiar el comportamiento probabilístico de estos datos a lo largo del tiempo para identificar patrones y hacer predicciones.

1.3 Sucesos y Álgebra de sucesos

Nuestro objeto de estudio en este tema lo constituirán los experimentos aleatorios. Para modelizarlo, haremos uso de la Teoría de Conjuntos, que nos sirve de base para introducir el concepto de suceso.

Definición 1.1 Se llama espacio muestral asociado a un experimento aleatorio al conjunto formado por todos los posibles resultados del experimento aleatorio. Se representa por Ω.

Se llama punto muestral a cada elemento del espacio muestral, $\omega_1, \omega_2, \ldots$ Es decir:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

Existen diferentes tipos de espacios muestrales:

(a) **Finito**: es aquel que tiene un número finito de elementos.

(b) **Infinito numerable**: es aquel que tiene un número infinito numerable de elementos.

(c) **Continuo**: es aquel que contiene un número infinito no numerable de elementos.

Definición 1.2 Se denomina **suceso** a todo subconjunto A del espacio muestral, ($A \subseteq \Omega$). Es un resultado en que se concreta el experimento.

Los sucesos suelen representarse por letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots$

Definición 1.3 Se llama espacio de sucesos, $\mathcal{S}$, al conjunto formado por todos los sucesos asociados al experimento aleatorio en cuestión.

Existen distintos tipos de sucesos:

(a) Suceso imposible es aquel que no ocurre nunca. Se representa por $\emptyset$.

(b) Suceso seguro es aquel que ocurre siempre. Se representa por Ω.

(c) Suceso elemental es el formado por un sólo punto muestral.

(d) Suceso compuesto es el formado por más de un punto muestral.

Se dirá que un suceso ha ocurrido, si en la realización del experimento aleatorio se obtiene como resultado alguno de los elementos que lo componen.

1.3.1 Operaciones con sucesos.

Hemos establecido una correspondencia entre sucesos y conjuntos. Vamos a recordar algunas operaciones y relaciones entre conjuntos, que ahora, serán de interés para trasladarlas a los sucesos.

Dados los sucesos A y B de un espacio muestral Ω, definimos

Definición 1.4 El suceso complementario de A, que se denota por A^c, es el suceso formado por todos los puntos muestrales que no pertenecen a A.

$$A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$

El suceso A^c ocurre si y sólo si no ocurre A.

Definición 1.5 La unión de los sucesos A y B, que se denota por $A \cup B$, es el suceso formado por todos los puntos muestrales que pertenecen al menos a uno de los sucesos.

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \ \text{ o } \ \omega \in B\}$$

El suceso $A \cup B$ ocurre siempre que ocurra A ó B o ambos.

Definición 1.6 La intersección de los sucesos A y B, que denotamos por $A \cap B$, es el suceso formado por todos los puntos muestrales que pertenecen a ambos sucesos.

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \ \text{ y } \ \omega \in B\}$$

El suceso $A \cap B$ ocurre siempre que ocurran A y B.

Definición 1.7 La diferencia de los sucesos A y B, que denotamos por $A - B$, es el suceso formado por todos los puntos muestrales que pertenecen a A y no pertenecen a B.

$$A - B = A \cap B^c$$

El suceso $A - B$ ocurre si ocurre A y no ocurre B.

Definición 1.8 A y B son sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes, si la ocurrencia simultánea de ambos es imposible, es decir: $A \cap B = \emptyset$.

Un suceso y su complementario son siempre sucesos incompatibles.

1.3.2 Propiedades.

Propiedades de las operaciones con sucesos:

1. Conmutativas
   (1.a) $A \cup B = B \cup A$
   (1.b) $A \cap B = B \cap A$
2. Asociativas
   (2.a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   (2.b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Distributivas
   (3.a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (3.b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Involución $(A^c)^c = A$
5. (5.a) $A \cup \emptyset = A$
   (5.b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
6. Idempotencia
   (6.a) $A \cup A = A$
   (6.b) $A \cap A = A$
7. Complementariedad
   (7.a) $A \cup A^c = \Omega$
   (7.b) $A \cap A^c = \emptyset$
8. (8.a) $A \cup \Omega = \Omega$
   (8.b) $A \cap \Omega = A$
9. Leyes de De Morgan
   (9.a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   (9.b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Comprueba visualmente las definiciones y propiedades pulsando aquí. (la primera)

1.3.3 Estructura del espacio de sucesos

Para el desarrollo de la Teoría de la Probabilidad es conveniente considerar clases de subconjuntos del espacio muestral que sean cerradas bajo las operaciones básicas de conjuntos.

Definición 1.9 Sea $\mathcal{S}$ una familia de subconjuntos de Ω, si verifica:

(a) $\Omega \in \mathcal{S}$

(b) $A_n \in \mathcal{S}, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$

(c) Dado $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c \in \mathcal{S}$

diremos que $\mathcal{S}$ tiene estructura de σ-álgebra sobre Ω.

Definición 1.10 La clase $\mathcal{S}$ definida sobre Ω con estructura de σ-álgebra se denominará espacio de sucesos. Y a sus elementos sucesos.

Formaciones CEE

Definición 1.11 El par $(\Omega, \mathcal{S})$ se denomina espacio probabilizable.

1.4 Definición axiomática de probabilidad

Dado un suceso, A, perteneciente al espacio de sucesos $\mathcal{S}$ asociado al espacio muestral Ω, la probabilidad trata de asignar a A una medida teórica de la ocurrencia de A.

Definición 1.12 Dado el espacio de sucesos $\mathcal{S}$ (y por tanto con estructura de σ-álgebra) asociado a un espacio muestral Ω, se define una medida de probabilidad, P, como una función:

$$P : \mathcal{S} \longrightarrow [0,1]$$

que verifique los siguientes axiomas:

Axioma 1: $P(A) \geq 0$, para cada $A \in \mathcal{S}$

Axioma 2: $P(\Omega) = 1$

Axioma 3: $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, con $A_n \in \mathcal{S}$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$

Como consecuencia de los axiomas de Kolmogorov pueden deducirse una serie de propiedades de la función $P(\cdot)$, que enunciamos a continuación.

P.1 $P(\emptyset) = 0$.

P.2 $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$, con $A_i \in \mathcal{S}$ verificando que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

P.3 $P(A^c) = 1 - P(A)$; para cada $A \in \mathcal{S}$.

P.4 Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ con $A, B \in \mathcal{S}$.

P.5 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; con $A, B \in \mathcal{S}$.

P.6 $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$, con $A_i \in \mathcal{S}$.

Definición 1.13 Se denomina espacio probabilístico a la terna $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, donde $\mathcal{S}$ es el espacio de sucesos asociado al espacio muestral Ω, y P es una medida de probabilidad.

1.5 Probabilidad condicional

Supóngase que se realiza un experimento cuyo espacio muestral de resultados es Ω y también que se han especificado las probabilidades para todos los sucesos de la σ-álgebra. Se estudiará ahora la forma en que cambia la probabilidad de un suceso A cuando se sabe que otro suceso B ha ocurrido. Esta nueva probabilidad de A se denomina probabilidad condicional del suceso A dado que el suceso B ha ocurrido. La notación para esta probabilidad condicional es $P(A \mid B)$. Si se sabe que un suceso B ha ocurrido, entonces se sabe que el resultado del experimento es uno de los incluidos en B. Por tanto, para evaluar la probabilidad de que A ocurra, se debe considerar el conjunto de los resultados incluidos en B que también implican la ocurrencia de A. Como se representa a continuación, este conjunto es precisamente el conjunto $A \cap B$.

Resulta, por tanto, natural definir la probabilidad condicional $P(A \mid B)$ como la proporción de la probabilidad total $P(B)$ representada por la probabilidad $P(A \cap B)$. Estas consideraciones conducen a la siguiente definición.

Definición 1.14 Sea $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ un espacio probabilístico y $B \in \mathcal{S}$ con probabilidad no nula, $P(B) > 0$. Sea A un suceso cualquiera de $\mathcal{S}$, llamaremos probabilidad del suceso A condicionada a B, y se representará por $P(A \mid B)$, a

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1.5.1 Propiedades de la probabilidad condicionada

Sea el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ y $B \in \mathcal{S}$ con $P(B) > 0$. La función $P(\cdot \mid B)$, que a cada suceso A de $\mathcal{S}$ le asocia el número $P(A \mid B)$, es una probabilidad. Para ello basta ver que verifica la axiomática de Kolmogorov:

1. $P(A \mid B) \geq 0, A \in \mathcal{S}$, ya que $P(A \cap B) \geq 0$ y $P(B) > 0$.
2. $P(\Omega \mid B) = 1$, ya que
$$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = 1$$
3. Si $A_n, n \geq 1$, son sucesos incompatibles 2 a 2 , se verifica que
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \mid B)$$

Como consecuencia de que $P(\cdot \mid B)$ es una medida de probabilidad, se verifican las propiedades derivadas de la axiomática de Kolmogorov.

P.1 $\quad P(\emptyset \mid B) = 0$

P.2 $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \mid B)$, con $A_i \in \mathcal{S}$ verificando que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

P.3 $\quad P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$; para cada $A \in \mathcal{S}$

P.4 $\quad$ Si $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1 \mid B) \leq P(A_2 \mid B)$ con $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$

P.5 $\quad P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 \cap A_2 \mid B)$; con $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$

P.6 $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \mid B\right) \leq \sum_{i=1}^{k} P(A_i \mid B)$, con $A_i \in \mathcal{S}$

Veamos, a continuación, una importante consecuencia de la definición de probabilidad condicionada, conocida como **teorema del producto.**

Teorema 1.1 Sean n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ tales que $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Comprende más a fondo la probabilidad condicional con esta animación (la tercera)

1.6 Sucesos independientes

Supongamos que lanzamos dos monedas equilibradas una tras otra. Intuitivamente, el resultado de la primera tirada no influye en el resultado de la segunda tirada, serán por tanto sucesos independientes. En cambio, si consideramos una urna con una determinada composición y extraemos dos bolas sin reemplazamiento, una tras otra, parece evidente que el resultado de la primera extracción sí que que influirá en el resultado de la segunda extracción, serán sucesos dependientes. Se tratará de formalizar dichos conceptos.

Definición 1.15 Sea el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ y sean A y B sucesos de $\mathcal{S}$ con $P(B) > 0$. Diremos que los sucesos A y B son independientes si se verifica que

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Proposición 1.1 (a) Diremos que dos sucesos A y B son independientes si y solo si se verifica que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(b) Sea un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ y sean dos sucesos A y B de S. Si A y B son independientes, también lo son A y B^c (lo mismo puede afirmarse del par de sucesos A^c y B, y del par A^c y B^c).

(c) No existe ninguna implicación entre los conceptos de incompatibilidad e independencia.

Definición 1.16 $(\Omega, \mathcal{S}, P), A_1, A_2, \dots, A_n$, con $A_i \in \mathcal{S}$, se dirán mutuamente independientes si para cualesquiera $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ se verifica que $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ son independientes, i.e.

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots, \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \cdot P\left(A_{i_2}\right) \cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

■ **Ejemplo 1.1** Sea el espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ y sean los sucesos A, B y C tres sucesos cualesquiera. Diremos que A, ByC son mutuamente independientes si se verifican las igualdades

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

■

Definición 1.17 $(\Omega, \mathcal{S}, P), A_1, A_2, \dots, A_n$, con $A_i \in \mathcal{S}$, se dirán independientes 2 a 2 si

$$P\left(A_i \cap A_j\right) = P\left(A_i\right) \cdot P\left(A_j\right) \qquad \text{para cualquier} \quad i \neq j$$

N Se puede observar que:
(a) Si $A_1, A_2, \dots A_n$ son mutuamente independientes entonces son independientes 2 a 2.
(b) El recíproco no es cierto en general.

1.7 Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Una familia completa de sucesos divide el espacio muestral Ω en partes no solapadas que, al unirse, cubren todo el espacio. Cada resultado del experimento se encuentra en uno, y solo en uno, de los sucesos de la familia. De forma rigurosa, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.18 Sea Ω un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ una colección de sucesos en Ω. La colección $\mathcal{A}$ se denomina **familia completa de sucesos** si cumple las siguientes dos propiedades:

1. **Mutuamente excluyentes (o disjuntos)**:
   Los sucesos de la familia no se solapan entre sí. Esto significa que la intersección

de cada par de sucesos es el conjunto vacío. Matemáticamente:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{para todo } i \neq j, \quad i,j = 1,2,\ldots,n$$

Es decir, si ocurre un suceso A_i, entonces ningún otro suceso A_j (con $j \neq i$) puede ocurrir simultáneamente.

2. **Exhaustivos**:
La unión de todos los sucesos de la familia cubre todo el espacio muestral Ω. Es decir, alguno de los sucesos de la familia debe ocurrir necesariamente en cada realización del experimento aleatorio. Matemáticamente:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

Esto implica que no hay ningún resultado del experimento que quede fuera de la consideración de al menos uno de los sucesos A_i.

Sobre este concepto obtenemos los resultados que se dan a continuación.

1.7.1 Teorema de la Probabilidad Total

Teorema 1.2 Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ y $\mathcal{A}$ una familia completa de sucesos, se verifica para todo $B \in \mathcal{S}$:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

■ **Ejemplo 1.2** Se quiere estudiar la situación laboral de los trabajadores en cuatro sectores de la economía. Las probabilidades de seleccionar a una persona en paro en cada uno de los cuatro sectores son, respectivamente, $0,06$; $0,03$; $0,02$ y $0,1$. Si el 40% de las personas pertenecen al primer sector, y el resto se divide en parte iguales entre los otros tres, ¿cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar esté en paro?. Consideremos los sucesos

- A_1 : ”la persona seleccionada pertenece al primer sector económico”,
- A_2 : ”la persona seleccionada pertenece al segundo sector económico ”,
- A_3 : ”la persona seleccionada pertenece al tercer sector económico”,
- A_4 : ”la persona seleccionada pertenece al cuarto sector económico”,
- B: ”la persona seleccionada está en paro”,

De estos sucesos conocemos

$$P(A_1) = 0,4; \quad P(A_2) = 0,2; \quad P(A_3) = 0,2; \quad P(A_4) = 0,2$$
$$P(B \mid A_1) = 0,06; \quad P(B \mid A_2) = 0,03; \quad P(B \mid A_3) = 0,02; \quad \text{y} \quad P(B \mid A_4) = 0,1$$

Entonces

$$P(B) = P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + P(B \mid A_3) \cdot P(A_3) + P(B \mid A_4) \cdot P(A_4)$$

$$= 0,06 \cdot 0,4 + 0,03 \cdot 0,2 + 0,02 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,054$$

■

1.7.2 Teorema de Bayes

Teorema 1.3 Dado un espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, y $\mathcal{A}$ una familia completa de sucesos, se verifica para todo $B \in \mathcal{S}$:

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}, \quad \text{con } j = 1, 2, \ldots, n.$$

A las probabilidades $P(A_j)$ se les llama probabilidades a priori, y son las probabilidades iniciales que tenemos de los sucesos A_j, y que a veces de manera arbitraria deben asignarse puesto que no se tiene información sobre el ”pasado”. Ante una determinada evidencia y que se espera que van a ser ”mejoradas” o corregidas con la información que puede proporcionar el suceso B, obteniendo unas nuevas probabilidades, $P(A_j \mid B)$, llamadas probabilidades a posteriori, a través de las verosimilitudes, $P(B \mid A_j)$. Muchos casos judiciales de tipo forense acuden a este teorema para la dictación de las sentencias por parte de los jueces. En el campo de la medicina se utiliza para el diagnóstico de enfermedades.

■ **Ejemplo 1.3** Con el enunciado del ejemplo anterior, supongamos que la persona seleccionada está parada, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al primer sector económico?.

Recordemos que:

- A_1 : ”la persona seleccionada pertenece al primer sector económico”,
- A_2 : ”la persona seleccionada pertenece al segundo sector económico ”,
- A_3 : ”la persona seleccionada pertenece al tercer sector económico”,
- A_4 : ”la persona seleccionada pertenece al cuarto sector económico”,
- B: ”la persona seleccionada está en paro”,

de los cuales conocemos

$$P(A_1) = 0,4; \quad P(A_2) = 0,2; \quad P(A_3) = 0,2; \quad P(A_4) = 0,2$$
$$P(B \mid A_1) = 0,06; \quad P(B \mid A_2) = 0,03; \quad P(B \mid A_3) = 0,02; \quad \text{y} \quad P(B \mid A_4) = 0,1$$

Entonces la probabilidad pedida será:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1) \cdot P(A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{0,06 \cdot 0,4}{0,054} = 0.\widehat{4}$$

■

1.8 Ejercicios

Ejercicio 1.1 — Dip. 2023 (prom. int.). Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,8; P(A^c \cap B^c) = 0,1$ y $P(A^c \cup B^c) = 0,6$. ¿Son A y B independientes? ¿Son incompatibles? ■

Solución:

¿Son A y B independientes?$\longrightarrow$¿$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$?
¿Son A y B incompatibles?$\longrightarrow$¿$P(A \cap B) = 0$?
Por las leyes de Morgan:

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$$

y además:

$$P(S^c) = 1 - P(S)$$

Con lo cual:

$$P(A \cap B) = 1 - P\left(A^c \cup B^c\right) = 1 - 0,6 = 0,4 \neq 0 \quad \text{(No son incompatibles)}$$

Sabemos también que:

$$P(S \cup T) = P(S) + P(T) - P(S \cap T)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} P\left(A^c \cup B^c\right) &= P(A^c) + P(B^c) - P\left(A^c \cap B^c\right) \\ &= (1 - P(A)) + (1 - P(B)) - P\left(A^c \cap B^c\right) \end{aligned}$$

Es decir, se tiene, sustituyendo por los valores conocidos:

$$0,6 = (1 - 0,8) + (1 - P(B)) - 0,1$$

De lo cual, se tiene finalmente: $P(B) = 0,5$. Con esto:

$$0,4 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,5 \quad (A \text{ y } B \text{ son independientes}).$$

Ejercicio 1.2 — Dip. 2023 Ex.1 (1). Se dispone de dos urnas. La primera tiene dos bolas blancas y dos bolas rojas. La segunda contiene cuatro bolas blancas y dos rojas. Se selecciona al azar una urna, siendo la probabilidad de seleccionar la primera urna $\mathrm{P} = 2/3$. A continuación, se extrae aleatoriamente una bola de la urna seleccionada.

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja

b) Si la bola extraída es roja, calcule la probabilidad de que la urna seleccionada haya sido la primera.

Solución:

Datos dados:

1. Urna 1: 2 bolas blancas y 2 bolas rojas $\longrightarrow \begin{cases} P(B \mid U_1) = 1/2 \\ P(R \mid U_1) = 1/2 \end{cases}$

2. Urna 2: 4 bolas blancas y 2 bolas rojas $\longrightarrow \begin{cases} P(B \mid U_2) = 2/3 \\ P(R \mid U_2) = 1/3 \end{cases}$

3. Probabilidad de seleccionar la Urna 1: $P(U_1) = \frac{2}{3}$

4. Probabilidad de seleccionar la Urna 2: $P(U_2) = 1 - P(U_1) = \frac{1}{3}$

a) La probabilidad de que la bola extraída sea roja es la suma de dos eventos (Usamos el Teorema de la Probabilidad Total):

   1. Elegir la Urna 1 y extraer una bola roja.

   2. Elegir la Urna 2 y extraer una bola roja.

$$\begin{aligned} P(R) &= P(U_1) \cdot P(R \mid U_1) + P(U_2) \cdot P(R \mid U_2) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

b) Usaremos el teorema de Bayes:

$$P(U_1 \mid R) = \frac{P(R \mid U_1) \cdot P(U_1)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 1.3 — Dip. 2014 (1). Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 1/4, P(B \mid A) = 1/2$ y $P(A \mid B) = 1/4$. ¿Son A y B sucesos independientes? Justificar la respuesta.

Solución:

Por definición,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1/2,$$

y sabemos que $P(A) = 1/4$, con lo cual, despejando de la expresión anterior, tenemos que $P(A \cap B) = P(B \cap A) = 1/8$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/4$$

Y como hemos calculado anteriormente, $P(A \cap B) = 1/8$, de lo cual se tiene $P(B) = 1/2$.

De aquí podemos concluir que son sucesos independientes, pues

- $$1/8 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1/8.$$
- $$1/4 = P(A|B) = P(A) = 1/4.$$
- $$1/2 = P(B|A) = P(B) = 1/2.$$

Ejercicio 1.4 — Dip. 2015 (1). En unas oposiciones, el temario consta de 85 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 35 de los 85 temas ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

Solución:

$$P(\text{Saber al menos 1 de los tres temas})$$

$$= 1 - P(\text{No saber ninguno de los tres temas})$$

$$= 1 - \frac{50}{85} \cdot \frac{49}{84} \cdot \frac{48}{83}.$$

Ejercicio 1.5 — Dip. 2016 (1). Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 1/4, P(B/A) = 1/2$ y $P(A/B) = 1/4$. ¿El suceso A está incluido en el suceso B ? Justificar la respuesta.

Solución:

Si $A \subseteq B$, habría de ser $P(B|A) = 1$, pero esto no se verifica, pues del enunciado tenemos que $P(B|A) = 1/2$.

Ejercicio 1.6 — Dip. 2019 (1). Se consideran dos sucesos, A y B, asociados a un experimento aleatorio con $P(A) = 1/4, P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. Determine, justificando la respuesta, si los sucesos A y B son incompatibles.

Solución:

Dos sucesos $A, B \in \mathcal{F} = \sigma(\Omega)$ son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$, y por lo tanto $P(A \cap B) = 0$, pero según el enunciado:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/4 \neq 0,$$

es decir, no son incompatibles.

Ejercicio 1.7 — Ej. 5.6 O.Sánchez-Corona. La probabilidad de lluvia en una región es del 30%. Si llueve, la probabilidad de concluir a tiempo una carretera en esa región es del 65%, y si no llueve, esa probabilidad sería del 90%. Determine la probabilidad de que se termine a tiempo la construcción de esa carretera. Si no se ha concluído la construcción de la carretera, calcula la probabilidad de que haya llovido. ■

Solución:

Si consideramos los sucesos $L =$Llueve y $C =$Concluir a tiempo,

- Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(C|L) \cdot P(L) + P(C|L^c) \cdot P(L^c) = 0'65 \cdot 0'3 + 0'9 \cdot 0'7 = 0'825.$$

- Por el teorema de Bayes: Sabiendo que $P(C^c) = 1 - P(C) = 0'175$,

$$P(L|C^c) = \frac{P(C^c|L) \cdot P(L)}{P(C^c)} = \frac{0'35 \cdot 0'3}{0'175} = 0'6.$$

Formaciones CL