Tema 1: Introducción a la teoría de la probabilidad

Operaciones con sucesos

- Complementario de A: $A^c = \{\omega \in \Omega / \omega \notin A\}$
- Unión de A y B: $A \cup B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \quad \text{o} \quad \omega \in B\}$
- Intersección de A y B: $A \cap B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \quad \text{y} \quad \omega \in B\}$
- Diferencia de A y B: $A - B = A \cap B^c$
- A y B son sucesos incompatibles o mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$.

Propiedades:

- Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$
- Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Involución: $(A^c)^c = A$
- Operaciones con $\emptyset$: $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Complementariedad: $A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \emptyset$
- Operaciones con Ω: $A \cup \Omega = \Omega$ y $A \cap \Omega = A$
- Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Probabilidad

Se define la **probabilidad**, P, como una función $P : \mathcal{S} \longrightarrow [0,1]$ que verifica:

- $P(A) \geq 0$, para cada $A \in \mathcal{S}$
- $P(\Omega) = 1$
- $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, con $A_n \in \mathcal{S}$ tal que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$

Propiedades:

- $P(\emptyset) = 0$.
- $P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- Si $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Probabilidad condicional e Independencia de sucesos

Probabilidad condicionada:

La probabilidad de un suceso A cuando se sabe que otro suceso B ha ocurrido.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Teorema del producto:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P\left(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

Los sucesos A y B son **independientes** si se verifica que $P(A \mid B) = P(A)$

Propiedades:

- A y B son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Si A y B son independientes, lo son A y B^c, A^c y B y A^c y B^c.
- Incompatible e independiente son completamente diferentes.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ son **mutuamente independientes** si para $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ se verifica que $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ son independientes: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots, \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$

Teorema de la Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Teorema de la Probabilidad Total:

Si A_i es un conjunto de sucesos exhaustivos ($\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) y disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset \quad$ para todo $i \neq j$), para todo B

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

Teorema de Bayes:

Si A_i es un conjunto de sucesos exhaustivos ($\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$) y disjuntos ($A_i \cap A_j = \emptyset \quad$ para todo $i \neq j$), para todo B

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)}$$