

Estadística

oposiciones@formacionescee.com

1. Tema 1

Ejercicio 1.1. Durante un año, las personas de una ciudad utilizan 3 tipos de transportes: metro (M), autobús (A) y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son:

M:0,3; A:0,2; C:0,15; M y A: 0,1; M y C: 0,05; A y C: 0,06; M, A y C: 0,01.

Calcular las probabilidades siguientes:

- Que una persona tome al menos dos medios de transporte
- Que una persona viaje en metro y no en autobús
- Que una persona viaje en metro o en coche y no en autobús
- Que una persona vaya a pie

Solución:

$P(M) = 0,3$ $P(A) = 0,2$ $P(C) = 0,15$ $P(M \cap A) = 0,1$ $P(M \cap C) = 0,05$ $P(A \cap C) = 0,06$ $P(M \cap A \cap C) = 0,01$

- Que una persona tome al menos dos medios de transporte

$$P((A \cap M) \cup (A \cap C) \cup (M \cap C)) = P(A' \cup B' \cup C') = P(A') + P(B') + P(C') - P(A' \cap B) - P(B' \cap C') - P(C' \cap A') + P(A' \cap B' \cap C') = 0,1 + 0,06 + 0,05 - 0,01 - 0,01 - 0,01 + 0,01 = 0,19$$

Hemos tomado $A' = A \cap M$, $B' = A \cap C$ y $C' = M \cap C$.

- Que una persona viaje en metro y no en autobús

$$P(M \cap A^c) = P(M - A) = P(M) - P(M \cap A) = 0,3 - 0,1 = 0,2$$

- Que una persona viaje en metro o en coche y no en autobús

$$P((M \cup C) \cap A^c) = P(M) + P(C) - P(M \cap C) - P(M \cap A) - P(C \cap A) + 2P(M \cap C \cap A) = 0,3 + 0,15 - 0,05 - 0,1 - 0,06 + 0,01 = 0,25$$

- Que una persona vaya a pie

$$P((A \cup M \cup C)^c) = 1 - P(A \cup M \cup C) = 1 - (0,3 + 0,2 + 0,15 - 0,1 - 0,05 - 0,06 + 0,01) = 0,55$$

Ejercicio 1.2. Dip. 2015 ex. 1 En unas oposiciones, el temario consta de 85 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 35 de los 85 temas ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

Solución:

$$\begin{aligned} & P(\text{Saber al menos 1 de los tres temas}) \\ &= 1 - P(\text{No saber ninguno de los tres temas}) \\ &= 1 - \frac{50}{85} \cdot \frac{49}{84} \cdot \frac{48}{83} \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3. A los habitantes de Málaga se les ha hecho una encuesta para determinar el número de lectores de El Mundo y de El País. Los resultados de la encuesta fueron los siguientes: el 20% de los habitantes leen El Mundo, el 16% lee El País y un 1% lee ambos periódicos. Si se selecciona al azar a un lector de El Mundo, ¿Cuál es la probabilidad de que también lea El País?

Solución:

Si A es la probabilidad de leer El Mundo y B la probabilidad de leer El País, tenemos:

$$P(A) = 0,2 \quad P(B) = 0,16 \quad P(A \cap B) = 0,01$$

Y la probabilidad de leer El País condicionado a que lea El Mundo es:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,01}{0,2} = 0,05$$

Ejercicio 1.4. Dip. 2016 ex. 1

Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 1/4$, $P(B|A) = 1/2$ y $P(A|B) = 1/4$. ¿El suceso A está incluido en el suceso B ? Justificar la respuesta.

Solución:

Si $A \subseteq B$, habría de ser $P(B|A) = 1$, pero esto no se verifica, pues del enunciado tenemos que $P(B|A) = 1/2$.

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Ejercicio 1.5. Dip. 2019 ex. 1

Se consideran dos sucesos, A y B , asociados a un experimento aleatorio con $P(A) = 1/4$, $P(B | A) = 1/2$ y $P(A | B) = 1/4$. Determine, justificando la respuesta, si los sucesos A y B son incompatibles.

Solución:

Dos sucesos $A, B \in \mathcal{F} = \sigma(\Omega)$ son incompatibles si $A \cap B = \emptyset$, y por lo tanto $P(A \cap B) = 0$, pero según el enunciado:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/4 \neq 0,$$

es decir, no son incompatibles.

Ejercicio 1.6. Dip. 2018 ex. 1 Se consideran dos sucesos, A y B , asociados a un experimento aleatorio $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,58$ siendo \bar{A} y \bar{B} los sucesos complementarios de A y B respectivamente. Si el suceso M está incluido en A , ¿calcule el valor de $P(\bar{M} | \bar{A})$?

Solución:

Como $M \subseteq A$ entonces $\bar{A} \subseteq \bar{M}$ y por lo tanto $\bar{M} \cap \bar{A} = \bar{A}$, sabiendo esto:

$$P(\bar{M} | \bar{A}) = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = 1$$

Ejercicio 1.7. Dip. 2014 ex. 1

Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 1/4$, $P(B | A) = 1/2$ y $P(A | B) = 1/4$. ¿Son A y B sucesos independientes? Justificar la respuesta.

Solución:

Por definición,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1/2,$$

y sabemos que $P(A) = 1/4$, con lo cual, despejando de la expresión anterior, tenemos que $P(A \cap B) = P(B \cap A) = 1/8$.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/4$$

Y como hemos calculado anteriormente, $P(A \cap B) = 1/8$, de lo cual se tiene $P(B) = 1/2$.

Por lo tanto son sucesos independientes porque:

$$1/8 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = 1/8.$$

Ejercicio 1.8. Una urna contiene 39 bolas blancas y 1 bola negra, Se extraen sucesivamente sin devolución 3 bolas. Calcular la probabilidad de que las 2 primeras sean blanca y la tercera negra.

Solución:

Usando el teorema del producto:

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) \cdot P(N_3 | B_1 \cap B_2) = \frac{39}{40} \cdot \frac{38}{39} \cdot \frac{1}{38} = \frac{1}{40}$$

Ejercicio 1.9. Se lanzan dos dados equilibrados y se consideran los siguientes sucesos:

- A: Impar en el primer dado
- B: Impar en el segundo dado
- C: La suma de los dos dados es impar

¿Son los sucesos mutuamente independientes? ¿Son independientes dos a dos?

Solución:

Vamos a calcular las diferentes probabilidades que necesitamos: $P(A) = 1/2$ $P(B) = 1/2$

$$P(C) = P(\{(1, 2)(1, 4)(1, 6)(2, 1)(2, 3)(2, 5)(3, 2)(3, 4)(3, 6) (4, 1)(4, 3)(4, 5)(5, 2)(5, 4)(5, 6)(6, 1)(6, 3)(6, 5)\}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(\{(1, 1)(1, 3)(1, 5)(3, 1)(3, 3)(3, 5)(5, 1)(5, 3)(5, 5)\}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap C) = P(\{(1, 2)(1, 4)(1, 6)(3, 2)(3, 4)(3, 6)(5, 2)(5, 4)(5, 6)\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(B \cap C) = P(\{(2, 1)(2, 3)(2, 5)(4, 1)(4, 3)(4, 5)(6, 1)(6, 3)(6, 5)\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

Luego no son mutuamente independientes, porque $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. Pero sí son independientes dos a dos porque $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$, $P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$ y $P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$

Ejercicio 1.10. Se lanza una moneda con una probabilidad de 2/3 de que el resultado sea cara. Si aparece una cara, se extrae una bola aleatoriamente de una urna que contiene dos bolas rojas y tres verdes. Si el resultado es cruz, se extrae una bola de otra urna que contiene dos rojas y dos verdes. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

Solución:

Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(R | U_1)P(U_1) + P(R | U_2)P(U_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{30}$$

Ejercicio 1.11. En una batalla naval, tres destructores localizan y disparan simultáneamente a un submarino. La probabilidad de que el primer destructor hunda el submarino es 0,6, la de que lo hunda el segundo el 0,3 y la de que lo hunda el tercero es 0,1. ¿Cuál es la probabilidad de que el submarino sea hundido.

Solución:

Sea H es suceso "Al menos uno de los tres destructores lo hunda".

Vamos a resolverlo desarrollando la probabilidad de la unión y utilizando el hecho de que los disparos de los destructores son independientes

$$\begin{aligned} P(H) &= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) \\ &+ P(A \cap B \cap C) = 0,6 + 0,3 + 0,1 - 0,6 \cdot 0,3 - 0,3 \cdot 0,1 - 0,6 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = \\ &0,748 \end{aligned}$$

Ahora vamos a resolverlo por el complementario, vamos a calcular la probabilidad de que ninguno lo hunda (es decir, que los tres fracasen):

$$\begin{aligned} P(H^c) &= P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c) \cdot P(B^c) \cdot P(C^c) = \\ (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,3) \cdot (1 - 0,1) &= 0,252 \implies P(H) = 1 - P(H^c) = 0,748 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.12. En una ciudad, el 40% de las personas tienen el pelo rubio, el 25% tienen ojos azules y el 5% el pelo rubio y los ojos azules. Se selecciona una persona al azar. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

- Tener el pelo rubio si tiene los ojos azules
- Tener los ojos azules si tiene el pelo rubio
- No tener pelo rubio ni ojos azules
- Tener exactamente una de estas características

Solución:

Sea R 'Tener el pelo rubio' y A 'Tener los ojos azules', sabemos que:

$$P(R) = 0,4 \quad P(A) = 0,25 \quad P(R \cap A) = 0,05$$

- Tener el pelo rubio si tiene los ojos azules

$$P(R | A) = \frac{R \cap A}{A} = \frac{0,05}{0,25} = 0,2$$

- Tener los ojos azules si tiene el pelo rubio

$$P(A | R) = \frac{R \cap A}{R} = \frac{0,05}{0,4} = \frac{1}{8}$$

- No tener pelo rubio ni ojos azules

Usamos una de las leyes de De Morgan $P(R^c \cap A^c) = P((R \cup A)^c) = 1 - P(R \cup A) = 1 - (P(A) + P(R) - P(A \cap R)) = 1 - (0,25 + 0,4 - 0,05) = 0,4$

d) Tener exactamente una de estas características

$$P(R \cup A) - P(R \cap A) = P(A) + P(R) - 2P(A \cap R) = 0,25 + 0,4 - 0,1 = 0,55$$

Ejercicio 1.13. La probabilidad de que se olvide inyectar a un enfermo un suero durante la ausencia del doctor es $2/3$. Si se inyecta suero al enfermo, éste tiene igual probabilidad de mejorar que de empeorar pero, si no se le inyecta, la probabilidad de mejorar es $0,25$. Al regreso, el doctor se encuentra con que el enfermo ha empeorado. ¿Cuál es la probabilidad de que no se le haya inyectado el suero?

Solución:

Sean los sucesos:

- S: Se ha inyectado el suero
- N: No se ha inyectado el suero
- M: El enfermo ha mejorado
- E: El enfermo ha empeorado

Por el enunciado sabemos que:

$$P(S) = 1/3 \quad P(N) = 2/3 \quad P(M | S) = 0,5 \quad P(E | S) = 0,5$$

$$P(M | N) = 0,25 \quad P(E | N) = 0,75$$

Por el teorema de Bayes:

$$P(N | E) = \frac{P(E | N) \cdot P(N)}{P(E | S) \cdot P(S) + P(E | N) \cdot P(N)} = \frac{0,75 \cdot 2/3}{0,5 \cdot 1/3 + 0,75 \cdot 2/3}$$
$$= \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

Ejercicio 1.14. Dip. 2023 ex. 1

Se dispone de dos urnas. La primera tiene dos bolas blancas y dos bolas rojas. La segunda contiene cuatro bolas blancas y dos rojas. Se selecciona al azar una urna, siendo la probabilidad de seleccionar la primera urna $P = 2/3$. A continuación, se extrae aleatoriamente una bola de la urna seleccionada.

- a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja
- b) Si la bola extraída es roja, calcule la probabilidad de que la urna seleccionada haya sido la primera.

Solución:

Tenemos los siguientes datos:

- Urna 1: 2 bolas blancas y 2 bolas rojas $\rightarrow \begin{cases} P(B | U_1) = 1/2 \\ P(R | U_1) = 1/2 \end{cases}$
- Urna 2: 4 bolas blancas y 2 bolas rojas $\rightarrow \begin{cases} P(B | U_2) = 2/3 \\ P(R | U_2) = 1/3 \end{cases}$
- Probabilidad de seleccionar la Urna 1: $P(U_1) = \frac{2}{3}$
- Probabilidad de seleccionar la Urna 2: $P(U_2) = 1 - P(U_1) = \frac{1}{3}$

a) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(R) = P(U_1) \cdot P(R | U_1) + P(U_2) \cdot P(R | U_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

b) Por el teorema de Bayes:

$$P(U_1 | R) = \frac{P(R | U_1) \cdot P(U_1)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

Ejercicio 1.15. Dip. 2023 ex. 1 Interna

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,8$; $P(A^c \cap B^c) = 0,1$ y $P(A^c \cup B^c) = 0,6$. ¿Son A y B independientes? ¿Son incompatibles?

Solución:

Para que A y B sean incompatibles, $P(A \cap B) = 0$

Usando una de las leyes de De Morgan, tenemos que:

$$0,6 = P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$$

Luego $P(A \cap B) = 0,4 \neq 0$, por tanto A y B no son incompatibles.

Para que A y B sean independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Usando la probabilidad de la unión, tenemos que:

$$0,6 = P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c) = (1 - P(A)) + (1 - P(B)) - P(A^c \cap B^c) = 0,2 + 1 - P(A^c \cap B^c) - 0,1$$

Luego $P(B) = 0,5$ y $0,4 = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,5$ por tanto A y B son independientes.

Ejercicio 1.16. Supóngase que en un centro médico, de todos los fumadores de quienes se sospecha que tenían cáncer pulmonar, el 90% lo tenía mientras que únicamente el 5% de los no fumadores lo padecía. Si la proporción de fumadores es de 0,45, ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer pulmonar, seleccionado al azar, sea fumador?

Solución:

Sean los sucesos:

- F : Paciente fumador
- F^c : Paciente no fumador
- C : El paciente tiene cáncer de pulmón
- C^c : El paciente no tiene cáncer de pulmón

Del enunciado, obtenemos:

$$P(C | F) = 0,9 \quad P(C | F^c) = 0,05 \quad P(F) = 0,45$$

Usando el teorema de Bayes:

$$P(F | C) = \frac{P(C|F) \cdot P(F)}{P(C|F) \cdot P(F) + P(C|F^c) \cdot P(F^c)} = \frac{0,9 \cdot 0,45}{0,9 \cdot 0,45 + 0,05 \cdot 0,55} = 0,9364$$

Ejercicio 1.17. La probabilidad de lluvia en una región es del 30%. Si llueve, la probabilidad de concluir a tiempo una carretera en esa región es del 65%, y si no llueve, esa probabilidad sería del 90%. Determine la probabilidad de que se termine a tiempo la construcción de esa carretera. Si no se ha concluido la construcción de la carretera, calcula la probabilidad de que haya llovido.

Solución:

Si consideramos los sucesos L = Llueve y C = Concluir a tiempo,

- Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(C|L) \cdot P(L) + P(C|L^c) \cdot P(L^c) = 0'65 \cdot 0'3 + 0'9 \cdot 0'7 = 0'825.$$

- Por el teorema de Bayes: Sabiendo que $P(C^c) = 1 - P(C) = 0'175$,

$$P(L|C^c) = \frac{P(C^c|L) \cdot P(L)}{P(C^c)} = \frac{0'35 \cdot 0'3}{0'175} = 0'6.$$

Ejercicio 1.18. Los jugadores A y B lanzan un dado cada uno: si el dado de A marca un valor mayor o igual que el de B, comienza a jugar A; en caso contrario, comienza B. El juego consiste en sacar una bola de una urna que contiene una bola roja, una verde y una negra. Si comienza el jugador A y la bola es roja, gana el jugador A. Si la bola no es roja, se devuelve a la urna y saca una bola el jugador B, que gana si la bola es verde o negra; en caso contrario, gana A. Si empieza el jugador B, y la bola es roja o verde, gana el jugador B; en caso contrario, gana A. Se pide calcular las siguientes probabilidades, razonando la respuesta:

- La probabilidad de que el jugador A inicie el juego. ¿Y de que lo inicie el jugador B?
- La probabilidad de que el jugador A gane el juego. ¿Y de que lo gane el jugador B?
- Si el juego lo ha ganado el jugador B ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya iniciado?

Solución:

- Hay 36 posibles opciones al tirar cada uno de los jugadores un dado y de ellas, el jugador A sacará mayor o igual puntuación que el jugador B en 21 $(\{(1,1) (2,1) (2,2) (3,1) (3,2) (3,3) (4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)\})$. Luego si llamamos A y B a los sucesos 'Empiece el jugador A' y 'Empieza el jugador B' respectivamente, tenemos que $P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$ y $P(B) = \frac{5}{12}$

- Sea G_A el suceso 'Gana el jugador A' y G_B el suceso 'Gana el jugador B'. Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(G_A) = P(G_A | A) \cdot P(A) + P(G_B | B) \cdot P(B) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{54}$$

$$\text{Por lo tanto, } P(G_B) = 1 - \frac{25}{54} = \frac{29}{54}.$$

- Por el teorema de Bayes:

$$P(B | G_B) = \frac{P(G_B | B) \cdot P(B)}{P(G_B)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{12}}{\frac{29}{54}} = \frac{15}{29}$$

Ejercicio 1.19. Sup. 2023 ex. 1 Interna

Un dispositivo permite detectar cierta enfermedad en el 80% de las personas con la misma, cometiendo errores con sólo el 5% de las personas que no la tienen. La incidencia de la enfermedad en la población es de 30 casos por cada 10000 habitantes.

- Calcule la probabilidad de que una persona tenga la enfermedad si da positivo una vez en la prueba.

Solución:

Resumiendo las condiciones del enunciado:

- Estado Inicial:

- Enfermo ($P(E) = 0,003$).

- Sano ($P(S) = 0,997$).

2. Probabilidades Condicionales:

a) Si estoy enfermo:

- Positivo ($P(Pos | E) = 0,8$).

- Negativo ($P(Neg | E) = 0,2$).

b) Si estoy sano:

- Positivo ($P(Pos | S) = 0,05$).

- Negativo ($P(Neg | S) = 0,95$).

(i) Por el Teorema de Bayes:

$$P(E | Pos) = \frac{P(Pos|E) \cdot P(E)}{P(Pos|E) \cdot P(E) + P(Pos|S) \cdot P(S)} = \frac{0,8 \cdot 0,003}{0,8 \cdot 0,003 + 0,05 \cdot 0,997} \approx 0,046.$$